Topología I
Examen XII

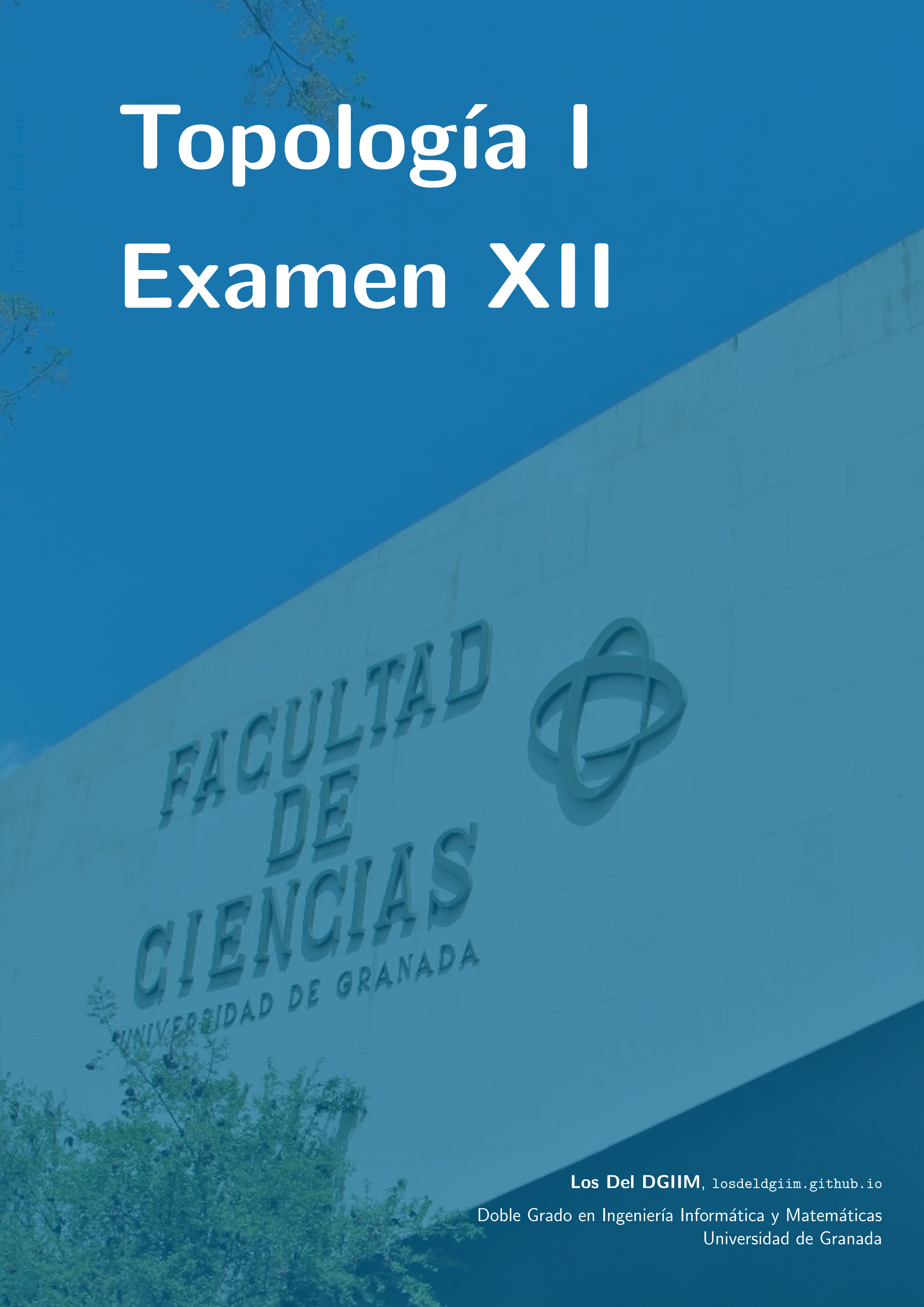

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen XII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2024-2025

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Lo pone el departamento.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 22 de enero de 2025.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1. En $\mathbb{R}$ se considera la única topología $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de $\mathcal{T}$ en x, $\forall x \in \mathbb{R}$, donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x &= \{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\mid \varepsilon > 0\}, \text{ si } x \neq 0,\ x \neq 1 \\ \mathcal{B}_0 &= \{]-\varepsilon, 0] \cup]1-\varepsilon, 1[\mid \varepsilon > 0\} \\ \mathcal{B}_1 &= \{]0, \varepsilon[\cup [1, 1+\varepsilon[\mid \varepsilon > 0\} \end{aligned}$$

(a) (1.5 puntos) Sea $A = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\subseteq \mathbb{R}$. Calcula el interior y la clausura de A. ¿Es A conexo?

(b) (2 puntos) ¿Verifica $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ el segundo axioma de numerabilidad? ¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ un espacio Hausdorff? ¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ compacto?

(c) (1.5 puntos) Consideremos en $\mathbb{R}$ la relación de equivalencia

$$xRx' \text{ si y solo si } x = x' \text{ o } x, x' \in]-\infty, 0] \text{ o } x, x' \in [1, +\infty[$$

Demuestra que $(\mathbb{R}/\mathcal{R}, \mathcal{T}/\mathcal{R})$ es homeomorfo a $([0,1], (\mathcal{T}_u)_{|[0,1]})$.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ y $(Z, \mathcal{T}'')$ espacios topológicos y denotemos $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ las proyecciones. Prueba que $f : (Z, \mathcal{T}'') \to (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es continua si y solo si las aplicaciones $f_X = \pi_X \circ f : (Z, \mathcal{T}'') \to (X, \mathcal{T})$ y $f_Y = \pi_Y \circ f : (Z, \mathcal{T}'') \to (Y, \mathcal{T}')$ son continuas.

Ejercicio 3. Dados $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos, se dice que una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es localmente constante si $\forall x \in X$, $\exists V$ entorno de x tal que $f_{|V}$ es constante.

(a) (1 punto) Demuestra que si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es localmente constante entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ para todo $A \subset Y$.

(b) (2 puntos) Demuestra que $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y solo si para todo espacio topológico $(Y, \mathcal{T}')$ y toda aplicación localmente constante $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ se tiene que f es constante.